7.3 Cebirsel Lineer Denklem Sistemleri, Lineer Bağımsızlık, Özdeğer, Özvektörler.

n-değişkenli (bilinmeyenli) n-denklem sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (7.7)$$

(7.7)'yi A $n\times n$ tipinde katsayılar matrisi ve b $n\times 1$ tipinde verilen vektör olmak üzere

$$Ax = b \qquad (7.8)$$

formunda yazabiliriz. $b=0$ ise sisteme **homojen**, diğer durumda **homojen olmayan** sistem denir.

Eğer katsayılar matrisi A'nın determinantı sıfırdan farklı ise yani A'nın tersi varsa (7.8) sisteminin yalnız bir çözümü vardır. (7.8)'in her iki tarafını A^{-1} ile çarparak, çözümün

$$x = A^{-1}b$$

olduğu görülür. Özel olarak sistem homojen ise yani $b=0$ ise yalnız $x=0$ aşikar çözümü vardır.

Eğer A singüler ise, yani $\det A=0$ ise (7.8)'in ya çözümü yoktur yada çözüm tek değildir. Homojen sistemin aşikar çözümünün yanında sonsuz (sıfırdan farklı) çözümü vardır. Homojen olmayan

sistemlerde b belli şartı sağlamazsa çözüm yoktur. Bu şart, A'nın eki A^* olmak üzere $A^*y=0$ şartını sağlayan bütün y vektörleri için

$$(b, y) = 0$$

dır. Bu şartı sağlayan (7.8) sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu çözümler, x^0 (7.8)'in bir özel çözümü ve ξ, homojen kısmın herhangi bir çözümü olmak üzere

$$x = x^{(0)} + \xi$$

formundadır.

Bir lineer denklem sistemini çözmenin en iyi yolu satır basamak form haline getirmektir. (Ayrıntı için bak: lineer cebir notları). (7.8) denklem sisteminde katsayılar matrisi A'ya b vektörünü ekliyerek genişletilmiş katsayılar matrisi $(A{:}b)$'yi elde ederiz. Bu matrisi elementer satır işlemleri ile üçgensel form haline getirip çözümü kolaylıkla bulabiliriz.

Örk:1) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3 \to c_1 + c_3]{c_2 \to 2c_1 + c_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$4x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 2$

$5x_2 = -10 \Rightarrow x_2 = -2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 1$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3 = -c_1 + c_2]{c_2 \to -2c_1 + c_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{c_3 \to -c_2 + c_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-3x_2 + 3x_3 = -3$ $\quad x_3 = t \in \mathbb{R}$ $\quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - 2(1+t) + t = -t$

$x_2 = 1 + t$

$$x = \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Lineer Bağımsızlık.

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_k x^{(k)} = 0 \qquad (7.9)$$

denklemini sağlayan en azından bir tanesi sıfırdan farklı $c_1, c_2, \dots, c_k$ (kompleks) sayıları varsa $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ vektörlerine **lineer bağımlı** vektörler denir. (7.9) denklemini yalnız $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ sayıları sağlıyorsa $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ vektörlerine **lineer bağımsız** vektörler denir.

n bileşene sahip n vektör kümesini düşünelim. $x^{(j)}$ vektörünün i. bileşeni $x_{ij} = x_i^{(j)}$ olsun. $X = (x_{ij})$ dersek (7.9) denklemini

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} c_1 + \dots + x_1^{(n)} c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)} c_1 + \dots + x_n^{(n)} c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} c_1 + \dots + x_{1n} c_n \\ \vdots \\ x_{n1} c_1 + \dots + x_{nn} c_n \end{pmatrix} = Xc = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $\det X \neq 0$ ise bu denklemin yalnız $c=0$ çözümü olur. Yani $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ vektörlerinin lineer bağımsız

olması için gerek ve yeter şart $\det X \neq 0$ olmasıdır.

Örnek: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz. Lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Vektörleri x_{ij} matris formunda yazar, determinantına bakarsak;

$$\det X = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

olduğu görülür. Yani vektörler lineer bağımlıdır.

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} = 0$$

denklemini çözersek;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-3c_2 + 9c_3 = 0$

$c_3 = t$

$c_2 = 3t$

$c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = -2t$ $\quad t=1$ alırsak $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$

$$-2x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)} = 0$$

dır.

$$c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) + \dots + c_k x^{(k)}(t) = 0$$

denklemini sağlayan en azından bir tanesi sıfırdan farklı $c_1, c_2, \dots, c_k$ sayıları varsa $\alpha < t < \beta$ aralığında $x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)$ vektör fonksiyonlarına **lineer bağımlı**, diğer durumda yani $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ olması durumunda **lineer bağımsız** denir.

Özdeğer ve özvektörler.

$$Ax=y$$

denklemine verilen x vektörünü, yeni bir y vektörüne dönüştüren lineer dönüşüm olarak bakabiliriz. Çoğu uygulamalarda verilen vektörü kendisinin belli katına dönüştüren dönüşümler önemli rol oynar. Buna göre $y=\lambda x$ vektörünü bulmak için

$$Ax=\lambda x$$

veya

$$(A-\lambda I)x=0 \qquad (7.10)$$

denkleminin çözümüne bakmamız gerekir. Burada λ bir skalerdir. (7.10) denkleminin sıfırdan farklı çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0 \qquad (7.11)$$

olmasıdır. (7.11) denklemini sağlayan λ değerlerine A matrisinin özdeğerleri denir ve bu λ değerlerini kullanarak elde edilen sıfırdan farklı çözümlerede (vektörlerede) bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler denir.

(7.11) denklemi λ'ya göre n. dereceden polinom olduğu için n tane $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğeri vardır. Bu özdeğerlerden bazıları aynı olabilir. Eğer (7.11) denkleminin bir kökü m kere

görünüyorsa bu özdeğer m katlılığa sahiptir denir. Özdeğer 1 katlılığa sahipse basit denir. Eğer n tane farklı özdeğer varsa yani hepsi basit ise n tane özvektör lineer bağımsızdır. Eğer tekrar eden özdeğerler varsa yani en az bir özdeğer m katlılığa sahipse n tane lineer bağımsız özvektör olabilirde olmayabilirde.

Örnek 1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

λ özdeğerleri ve x özvektörleri $(A-\lambda I)x=0$ denklemini sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denkleminin sıfırdan farklı çözümleri olması için

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0$$

olmalıdır. $\lambda_1=3$ ve $\lambda_2=3$ dir. Yani 3'ün katlılığı iki dir. $\lambda_1=\lambda_2=3$' karşı gelen özvektör,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1+x_2=0 \quad \begin{matrix} x_2=t \\ x_1=-t \end{matrix}$$

$$x^{(1)}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\neq 0$$

dir. Genellikle $t=1$ alınarak özvektör $x^{(1)}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak bulunur.

2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$(A-\lambda I)x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ denklemini sağlayan λ değerleri $\det(A-\lambda I)=0$'ın kökleridir.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2=0$$

Bu denklemin kökleri $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-1$ dir. 2 basit özdeğer, -1 katlılığı iki olan özdeğerdir.

$\lambda_1=2$'ye karşı gelen $x^{(1)}$ özvektörü

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denkleminin çözümüdür. Bu denklem çözülürse $x^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bulunur.

$\lambda_2=\lambda_3=-1$'e karşı gelen özvektörler

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

denkleminin çözümüdür. $x_3=k$, $x_2=t$ dersek $x_1=-k-t$ dir.

$$x=\begin{pmatrix} -k-t \\ t \\ k \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$k=0$, $t=1$ ve $k=1$, $t=0$ alınarak $x^{(2)}$ ve $x^{(3)}$ özvektörleri

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ özvektörleri lineer bağımsızdır.

$A^*=A$ yani $\bar{a}_{ji}=a_{ij}$ şartını sağlayan matrislere kendine-eşlenik veya Hermityan matrisler denir. Hermityan matrisler önemli matris sınıfıdır. Eğer matrisin elemanları reel ise $A^T=A$ olur. Hermityan matrislerin özdeğer ve özvektörleri aşağıdaki özellikleri içerir.

1) Bütün özdeğerler reeldir.
2) katlılığa sahip özdeğerler olsa bile daima n tane lineer bağımsız özvektör vardır.
3) $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$, farklı özdeğerlere karşı gelen özvektörler ise $(x^{(1)}, x^{(2)})=0$ dır. Eğer bütün özdeğerler basit ise özvektörler ortogonal (dik) küme oluşturur.
4) m katlılığa sahip özdeğerler için birbirine dik özvektörler seçilebilir. Bu yüzden ortogonal küme oluşturacak şekilde lineer bağımsız n tane özvektör daima seçilebilir.

Sıfırdan farklı elemanları yalnız köşegen elemanlarında bulunan matrise köşegen matris denir. Cebirsel denklem sistemlerinin çözümlerinde, verilen matrisi köşegen matrise dönüştürmek, çözümün bulunmasında önemli kolaylık sağlar. Bu dönüşümlerde ise özvektörler kullanışlıdır. Bir A matrisinin n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olduğunu düşünelim. Özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ve özvektörleri $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ olsun. Sütunları özvektörler $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ olan T matrisini oluşturalım. T'nin sütunları lineer bağımsız vektörler olduğundan $\det T \neq 0$ dır. Dolayısıyla T^{-1} vardır. Kolayca görülebileceği gibi AT matrisinin sütunları $Ax^{(1)}, Ax^{(2)}, \ldots, Ax^{(n)}$ vektörleridir. Köşegen elemanları A'nın özdeğerleri olan

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

köşegen matrisi olmak üzere, $Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}$ olduğundan

$$AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{pmatrix} = TD$$

dir. Her iki tarafı soldan T^{-1} ile çarparsak

$$T^{-1}AT = D$$

elde ederiz. Bu yüzden eğer A'nın özdeğer ve özvektörleri biliniyorsa A'yı köşegen matrise dönüştürebiliriz.

Bu işleme benzerlik dönüşümü denir. A ve D matrislerine de benzer matrisler denir. Köşegen matrise benzer matrislere köşegenleştirilebilir denir.

Eğer A Hermityen ise T^{-1} i bulmak çok kolaydır. A'nın $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ özvektörlerini $(x^{(i)}, x^{(i)}) = 1$ (her i için) olacak şekilde dik seçebileceğimizden $T^{-1} = T^*$ dır. (Yani T'nin tersi T'nin kompleks eşleneğinin transpozesine eşittir.)

Eğer A matrisi n'den daha küçük lineer bağımsız özvektörlere sahip ise $T^{-1}AT = D$ olacak şekilde T matrisi bulunamayacağından A köşegenleştirilemez.

(örnekler için lineer cebir ders notlarına bakınız;
http://www.mat.itu.edu.tr/ergezen/lineer/lineer.htm)